[illegible]

أ. التعاريف اللازمة:

١. الخاصية تحقق تقريباً في كل مكان: لتكن f خاصية رياضية معرفة على مجموعة قيوسة E عندئذ نقول إن الخاصية f تحقق تقريباً في كل مكان إذا تحققت الشرطية:

١. f غير محققة على $(E_0 \subset E)$ حيث E_0 قيوسة وقياسها $\lambda(E_0)=0$

٢. f محققة في E/E_0 ونكتب $f\,(a.e)$

٣. تكامل لبيغ للدالة البسيطة غير السالبة: لتكن $\varphi(x)$ دالة بسيطة غير سالبة نقول عن $\varphi(x)$ أنها قابلة للمكاملة حسب لبيغ على X إذا كان $\lambda(A_i)<\infty$ ونسمي العدد $\sum a_i\,\lambda(A_i)$ تكامل لبيغ للدالة البسيطة $\varphi(x)$ غير السالبة ونكتب:

$$\int_X \varphi(x)\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\lambda(A_i)$$

X. تكامل لبيغ للدالة القيوسة غير السالبة: لتكن $f(x)$ دالة قيوسة غير سالبة على المجموعة القيوسة X ولتكن $\varphi_n(x)$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة غير السالبة والمتقاربة من الدالة $f(x)$ في X عندئذ نعرف التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على X بالشكل: $\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\,d\lambda$

٤. نصف الحلقة: نقول عن الصف H أنه نصف حلقة في X إذا تحققت ① من أجل $A,B\in H$ فإن $A\cap B\in H$

② من أجل $A,B\in H$ توجد مجموعات منفصلة مثنى مثنى $A\backslash B=\bigcup C_i$

③ مثال: X = R والصف $H=\{[a,b): a<b\}\cup\{\emptyset\}$ فإن H نصف حلقة في R

٥. الجبر: إذا كان H حلقة و $X\in H$ سمي H جبراً

مثال: X مجموعة غير خالية ولتكن $H=\{\emptyset, X\}$ فإن H جبر على X لأنه حلقة و $X\in H$

٦. الحلقة: H حلقة إذا تحقق ما يلي حيث $\emptyset\neq H\subset 2^X$

① من أجل $A,B\in H \Leftarrow A\cap B\in H$ ② $A\backslash B\in H$

مثال ② الحلقة: $\{\emptyset, A, A^c, X\}$

٧. σ-الجبر: H σ-حلقة و $X\in H$

مثال σ-جبر: $\{\emptyset, X\}$

٨. σ-حلقة: لتكن $\emptyset\neq H\subset 2^X$ عندئذ H σ-حلقة في X إذا:

① $A,B\in H \Leftarrow A\backslash B\in H$ ② $A_1,A_2,\dots\in H \Leftarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in H$

مثال σ-حلقة: $\{\emptyset, A, A^c, X\}$

٩. σ-جبر: إذا كان H σ-حلقة وكان $X\in H$

مثال σ-جبر: $\{\emptyset, X\}$

١٠. الصف المطرد: لتكن X مجموعة غير خالية و $\emptyset\neq H\subset 2^X$ يسمى H صفاً مطرداً في X إذا تحقق: من أجل أي متتالية مطردة (A_n) من H فإن $\lim_{n\to\infty}(A_n)\in H$

١١. جبر بورل: لتكن (X,d) فضاء مترياً يسمى σ-الجبر المولد بصف المجموعات المفتوحة في (X,d) جبر بورل في (X,d) ونرمز له $B(X)$ حيث $\emptyset\in B(X)$

مثال عن مجموعات بورل: Q, R, Z, N, ∅, ...

١٢. الدالة القيوسة: لتكن $f: X\to R$ عندئذ f قيوسة إذا وفقط إذا كانت إحدى المجموعات التالية قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c:

$E(f>c)$, $E(f<c)$, $E(f\geq c)$, $E(f\leq c)$

١٣. المجموعة القيوسة: تكون المجموعة E قيوسة حسب μ^* إذا كان:

$A\subset 2^X$: $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$

١٤. القياس: نسمي الدالة المجموعية $\mu: A\to\mu(A)$; $\mu: H\to[0,+\infty]$ قياساً إذا حققت ① $\mu(\emptyset)=0$ ② الدالة غير سالبة أي $\mu(A)\geq 0$

③ $A_1,A_2,\dots\in H$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup A_i\in H$ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

١٥. القياس الخارجي: هو دالة مجموعية $\mu^*: 2^X\to[0,+\infty]$; $A\to\mu^*(A)$ تحقق ① $\mu^*(\emptyset)=0$ ② $A\subset B \Leftarrow \mu^*(A)\leq\mu^*(B)$ دالة متزايدة

③ $A_1,A_2,\dots\in 2^X$ فإن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$

١٦. القياس المنتهي: إذا كان $A\in H \Leftarrow \mu(A)<+\infty$ فإن μ القياس المنتهي

١٧. القياس σ-المنتهي: إذا كان $A_1,A_2,\dots\in H$ منفصلة و $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\mu(A_i)<\infty$ فإن μ قياس σ-منتهي على R

Sabbagh

حل المسائل التالية :

١- أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريباً على R :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in R\setminus N\\ 0 & x\in N\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sin x & x\in R\setminus N\\ x & x\in N\end{cases}$$

يوجد مجموعة جزئية من R وهي $E_0 = N$ حيث $\lambda(E_0)=0$

$E_0 = \{x\in E=R \;;\; f(x)\neq g(x)\} = E(f\neq g)$

$f(x)=g(x) \;;\; \forall x\in E/E_0 \;,\; x\in R/N$

ملاحظة : إن الدالتين (f, g) الجواب نفسه مع الانتباه إلى كونه متريد

٢- أثبت أن متتالية $f_n(x)$ المعرفة في [0,1] بالشكل :

$$f_n(x)=\begin{cases}x^n & x\in[0,1[\\ 1 & x=1\end{cases}$$

متقاربة تقريباً من الدالة $f(x)=0$ على [0,1] :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & ; 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$E_0 = f_n\neq 0 \;;\; x=1 \Rightarrow \lambda(E_0)=\lambda(1)=0$

$\Rightarrow \lim f_n(x) \overset{a.e}{=} 0$

ملاحظة : إن المتتالية $f_n(x)$ الجواب نفسه .

$f(x)=x^2-x$ هي دالة قيوسة حسب لبيغ والـ $\frac{1}{x}$ قيوسة أيضاً .

$f(x)=x^2$ قيوسة حسب لبيغ لأن x^2 دالة مستمرة .

$f(x)=\frac{1}{x}$ قيوسة لأن $f(x)=x$ قيوسة وحسب الخاصة إذا كانت f قيوسة فإن $\frac{1}{f}$ قيوسة .

٥- أثبت أن الدالة الثابتة هي دالة قيوسة في مجموعة ما .

ليكن $f: X\to \bar{R}$ من أجل $f(x)=a$ حيث a عدد حقيقي ثابت

$E(f>c) = \{x\in X \;;\; f(x)>c\} = \{x\in X \;;\; a>c\}$

$$\begin{cases}X & a>c\\ \emptyset & a\le c\end{cases}$$

X و ∅ قيوستان فإن (f > c) قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c ومنه f قيوسة .

٣- أثبت أن الدالة دالة ديريكليه قيوسة حسب لبيغ .

والعدد ديريكليه :

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap Q\\ 0 & x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$$

والدالة قيوسة لأنه من أجل أي عدد c لدينا :

$$E(f>c)=\begin{cases}[0,1] & ; c<0\\ [0,1]\cap Q & ; 0\le c<1\\ \emptyset & ; c\ge 1\end{cases}$$

ملاحظات هامة جداً :

كل دالة مستمرة هي دالة قيوسة : مثال

$f(x)=\sin x+2$ دالة قيوسة لأنها دالة مستمرة .

$f+g \;,\; f-g \;,\; f/g$

قيوسة إذا كانت f و g والثانية غير معدومة .

مقارنة بين القياسات حسب لبيغ - العد - الصفري .

قياس لبيغ ← معدودة قياسها 0 مثل N, Q, Z

← غير معدودة قياسها ∞ مثل R

← مجال قياسه b−a

قياس العد ← منتهية |A| عدد عناصرها

← غير منتهية +∞

القياس الصفري . المجموعة صفر

المجموعة	قياس لبيغ	قياس العد	القياس الصفري
B = N	0	∞	0
C = R \ N	0	∞	0
D = [1, 15]	b − a = 14	∞	0
E = (−∞, 1]	∞	∞	0
F = {1, 2, 3, 4}	0	4	0
A = {2, 4, …}	0	∞	0

Sabbagh

التكاملات العادية:

وهناك نوعين من التكاملات:

- تكاملات بسيطة ...
- تكاملات غير بسيطة ... x

لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ المعرفتين على $E=[0,8]$

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\\ 3 & 2\le x\le 4\\ 0 & 4<x<8\\ 6 & x=8\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\\ 5 & 2<x<8\\ 6 & x=8\end{cases}$$

① هل هذه الدوال بسيطة؟ وإذا كانت نعم أكتب التمثيل الطبيعي لها.

② احسب كلاً من $\int_E f(x)\,d\lambda$ / $\int_E g(x)\,d\lambda$ / $\int_E (f+g)\,d\lambda$

نعم هي بسيطة لأنها تأخذ قيم ثابتة على مجموعات جزئية من E

والتمثيل الطبيعي لها هو:

$$f(x)=1\cdot I_{[0,1]}+2\cdot I_{(1,2]}+3\cdot I_{[2,4]}+0\cdot I_{(4,8)}+6\cdot I_{\{8\}}$$

التمثيل الطبيعي لـ $g(x)$:

$$g(x)=1\cdot I_{[0,1]}+2\cdot I_{(1,2]}+5\cdot I_{(2,8)}+6\,I_{\{8\}}$$

وحساب التكامل:

$$\int_E f(x)\,d\lambda=1\cdot\lambda([0,1])+2\cdot\lambda((1,2])+3\cdot\lambda([2,4])+0\cdot\lambda((4,8))+6\,\lambda(\{8\})$$

$$=(1\cdot 1)+(2\cdot 1)+(3\cdot 2)+(0\cdot 4)+(6\cdot 0)=1+2+6=9$$

$$\int_E g(x)\,d\lambda=1\cdot\lambda([0,1])+2\,\lambda((1,2])+5\,\lambda((2,8))+6\,\lambda(\{8\})=(1\cdot 1)+(2\cdot 1)+(5\cdot 6)+(6\cdot 0)$$

$$=1+2+30=33$$

$$\int_E f(x)+g(x)\,d\lambda=9+33=42$$

ملاحظات: ١. اكتب التمثيل الطبيعي لها

٢. ثم تكامل لبيغ لها

٣. نحسب قياس المجال بالنسبة لـ لبيغ

احسب تكامل الدالة التالية:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & -2\le x\le 0\\ 2 & 0<x<2\\ 5 & 2\le x<3\\ 3 & 3\le x\le 5\end{cases}$$

إن الدالة المعطاة هي دالة بسيطة ، فتمثيلها الطبيعي:

$$\varphi(x)=1\cdot I_{[-2,0]}+2\,I_{(0,2)}+5\cdot I_{[2,3)}+3\cdot I_{[3,5]}$$

والتكامل:

$$\Rightarrow \int_E \varphi\,d\lambda=1\cdot\lambda([-2,0])+2\cdot\lambda((0,2))+5\cdot\lambda([2,3))+3\cdot\lambda([3,5])$$

$$=(1\cdot 2)+(2\cdot 2)+(5\cdot 1)+(3\cdot 2)$$

$$=2+4+5+6=17$$

... :

$\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$: لتكن دالة لبيغ البسيطة ... [illegible]

$$\int_E \varphi\,d\lambda=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\lambda(A_i)$$

... دالة محدودة ... $\lambda(E)<\infty$ ...

تكامل لبيغ العلوي والسفلي للدالة f على الشكل:

$$(\bar{I})\int_E f\,d\lambda=\inf\left\{\int_E \varphi\,d\lambda \;\; \text{بسيطة}\;\varphi,\ \varphi\ge f\right\}$$

$$(\underline{I})\int_E f\,d\lambda=\sup\left\{\int_E \varphi\,d\lambda \;\; \text{بسيطة}\;\varphi,\ \varphi\le f\right\}$$

$(\bar{I})\int f\,d\lambda=(\underline{I})\int f\,d\lambda$ ... قابلة للتكامل ...

... [illegible] ... :

$$\int_E f\,d\lambda=\sup\left\{\int_E h\,d\lambda\right\}$$ محدودة ...

$$\lambda(\{(A\ne 0)\})<\infty\}$$

تكامل الدوال غير البسيطة:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^2 & 1 < x \le 5 \end{cases}$$

احسب تكامل $f(x)$.

الدالة f كمولة حسب ريمان فهي كمولة حسب لبيغ

$$(L)\int f\,dx = (R)\int_0^5 f\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+1)\,dx + \int_1^5 (x+1)^2\,dx$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{(x+1)^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{3}{2} + \frac{215}{3} = \boxed{\frac{439}{6}}$$

ملاحظة: لحساب تكامل الدالة غير البسيطة نحول تكامل لبيغ الى تكامل ريمان (تكامل عادي).

سؤال ③: لتكن μ^* مقياس خارجي على X، أثبت أن صف المجموعات المقيوسة M_{μ^*} تشكل σ-جبر على X.

② هل يشكل المقصور $\mu^*|_{M_{\mu^*}}$ مقياساً؟ وضح ذلك.

① نعلم أن كلاً من X و Φ مقيوسة حسب μ^* ⇐ $X, \Phi \in M_{\mu^*}$

② إذا كانت $A_1, A_2, \ldots \in M_{\mu^*}$ أي أن A_i مجموعات مقيوسة ⇐ $\bigcup A_i$ مجموعة مقيوسة أيضاً ⇐ $\bigcup A_i \in M_{\mu^*}$

③ أو عكسنا ذكر أحد الشرطين:

- إذا كانت $A, B \in M_{\mu^*}$ فإن $A \setminus B \in M_{\mu^*}$ ⟵ M_{μ^*} σ-حلقة فيها X ⇐ M_{μ^*} يشكل σ-جبر

أو إذا كانت $A \in M_{\mu^*}$ فإن $A^c \in M_{\mu^*}$ والأمر محقق لأن متممة المجموعة المقيوسة تكون بدورها مقيوسة.

② بحسب ① المقصور $\mu^*|_{M_{\mu^*}}$ تشكل قياساً على M_{μ^*}

السؤال الأخير:

لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن H هي كل المجموعات الجزئية من N المحدودة ومتمماتها، أثبت أن H تشكل حلقة وجبر و σ-حلقة و σ-جبر على N.

الحل: إثبات الجبر - الحلقة - σ-حلقة - σ-جبر

H تشكل حلقة: لأن اجتماع وفرق مجموعتين محدودتين هو مجموعة محدودة على الأكثر أي أن

$\forall A, B \in H$: $A \setminus B \in H$ و $A \cup B \in H$

H تشكل جبر: H حلقة و $N \in H$ لأنها لا محدودة

H تشكل σ-حلقة: لأن فرق مجموعتين محدودتين هو مجموعة محدودة على الأكثر أي أن $A \setminus B \in H$ لأن $A, B \in H$ كما أن اجتماع عدد من المجموعات المحدودة على الأكثر هو مجموعة محدودة أي أن

$$\forall A_1, A_2, \ldots \in H \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$$

H تشكل σ-جبر: H تشكل σ-حلقة و $N \in H$

تمنياتي بالنجاح سائلاً الله

دائماً

Date: / /

Subject:

[illegible]